Le prie Monsieur
Arnoux de m'envoyer
sous bande (40 avenue de Wagram)
deux exemplaires du 1er fascicule où
ces articles se trouvent ; j'ai une revenu le montant
en timbres. — (J'aimerais autant avoir
deux épreuves).

Société philomathique de Paris

Séance du 11 mai 1867.

Mécanique. M. de Saint-Venant fait la communication suivante sur le choc longitudinal de deux barres parfaitement élastiques et sur la proportion de leur force vive qui est perdue pour la transformation ultérieure.

Lorsque deux barres parfaitement élastiques, supposées d'abord d'égale grosseur et de même matière, se sont heurtées longitudinalement, la plus courte, ainsi que Cauchy l'a reconnu le premier (*Société philomathique*, décembre 1826), prend tout entière la vitesse primitive de l'autre après que l'ébranlement ou le son qui s'y propage a parcouru ~~aller et retour~~ la longueur aller et retour en se réfléchissant ou faisant écho à l'extrémité non jointive. Comme cette vitesse est moindre que celle qui est alors possédée par une portion contiguë de l'autre barre, qui a été heurtée et qui va devant, l'illustre géomètre conclut que le choc est alors terminé et que les deux barres se séparent. Il en résulte une certaine perte de force vive, et on en déduit, pour les vitesses des deux centres de gravité après le choc, des expressions nouvelles très différentes de celles qui se trouvent dans tous les ouvrages traitant du choc des corps ~~parfaitement~~ élastiques.

Mais M. Poisson ne la séparation des barres n'elles ne sont pas de longueur égale, parce qu'il impose, pour qu'elle s'opère, qu'à l'endroit de la jonction non seulement la vitesse de la barre qui va devant ~~en cede cette~~ vienne à excéder celle de la barre qui va derrière, mais, encore, que les compressions soient alors nulles dans toutes deux. Et comme les formules qu'il a données en 1833 (*Mécanique*, t. 2) lui montrent que ces deux conditions ne sont jamais remplies à la fois jusqu'à un certain instant ultérieur où les mêmes formules indiquent que les barres restées unies reviennent à leur état primitif, il conclut que le choc recommencera en quelque sorte périodiquement pour peu que leurs longueurs soient différentes et qu'elles restent unies indéfiniment comme feraient deux corps dénués d'élasticité.

J'ai reconnu de diverses manières qu'il y avait lieu d'adopter la conclusion de Cauchy et les formules de vitesses finales qui s'en déduisent.

Il est bien vrai, et en cela Poisson a parfaitement fondé, qu'il faut tenir compte de la compression qui affecte une portion de la barre heurtée, à l'instant signalé où sa vitesse vient à surpasser celle de la barre heurtante. Cette compression engendre

en effet, par détente, immédiatement après, une vitesse en arrière qui, déduite de la vitesse en avant possédée par la tranche, la redeint à être égale à la vitesse que la barre heurtante possède alors ; d'où il suit qu'elles marchent encore juxtaposées. Mais cette juxtaposition ne dure que le temps qui s'écoule jusqu'à un deuxième instant, généralement très proche, où le son a parcouru aller et retour la plus longue des deux ; car, et c'est ce que Poisson n'a pas aperçu, si elles restaient unies au delà de ce dernier instant, les formules montrent que leurs compressions deviendraient négatives, et elles exerceraient l'une sur l'autre une traction. Or, cela est impossible puisque les barres sans adhérence l'une avec l'autre ne peuvent bien se pousser mais non se tirer. Elles se quitteront donc alors, et leur choc, qui était bien terminé dès le premier instant, comme l'a dit Cauchy, puisqu'elles cessaient d'agir l'une sur l'autre, a pour effet définitif d'éloigner mutuel au second instant.

J'ai donné une figure qui peint complètement l'état des barres avant, pendant et après leur choc. Elle offre les traces que laissaient dans l'espace leurs divers points si une vitesse commune leur était communiquée dans un sens transversal et était composée avec les vitesses longitudinales individuelles de ces points à chaque instant ; on y voit clairement l'instant où elles cessent de se solliciter l'une l'autre, l'instant où elles s'éloignent, et la suite des contractions et dilatations que se perpétuent périodiquement dans la plus longue des deux après leur séparation, tandis que la plus courte le mène sans vibrer.

Dans le cas plus général où les deux barres sont de grosseurs et même de matières différentes, j'ai démontré que les formules connues du choc des corps parfaitement élastiques ne sont exactes que lorsque le son les parcourt d'un bout à l'autre toutes deux dans le même temps. Et, quand cela n'a point lieu, je donne en séries trigonométriques des formules qui s'appliquent même lorsque leur forme est celle de troncs de cône ou de pyramide, et même de fuseaux composés de deux ou plusieurs pareils troncs. La solution pour être présentée en termes finis et simples si les deux barres sont prismatiques, et j'ai donné déjà (Comptes rendus, 24 décembre 1866 et le Monde 10 janvier 1867) les expressions des vitesses de leurs deux centres de gravité à l'instant où le son a parcouru aller et retour celle des deux qui exige pour cela le moins de temps.

Le savant M. Macquorn Rankine, au numéro du 15 février

du The Engineer, après avoir parlé, en des termes dont je le remercie, de mon mémoire de décembre auquel il attribue une grande importance pratique non moins que scientifique, cite un passage d'un Cours de Natural Philosophy actuellement sous presse, où Messrs. William Thomson en Tait arrivent d'une manière élémentaire aux résultats de Cauchy, qu'ils ne connaissaient pas ; et M. Rankine démontre d'une manière analogue le résultat plus général auquel je suis parvenu et que je viens de citer :

Mais, bien qu'à l'instant où le son a parcouru aller et retour celle des deux barres qui exige pour cela le moins de temps, et qu'on suppose être la barre heurtante, bien que alors la vitesse devienne moindre et leur point de fonction que celle de la barre heurtée, leur séparation n'a pas toujours lieu alors, à cause de la compression que la barre heurtée conserve et qui engendre par détente une vitesse de recul. Cela m'a donné lieu de trouver la véritable condition de la séparation, à substituer à celles que MM. Cauchy et Poisson ont supposées à priori. Cette condition consiste en ce que la vitesse de la barre heurtée, diminuée de sa compression multipliée par la vitesse du son qui s'y propage, doit être plus grande que la vitesse de la barre heurtante, augmentée du produit semblable ~~analogue~~ qui lui est relatif.

Il en résulte que la séparation des deux barres prismatiques de grosseurs différentes et de même matière a lieu lorsque l'ébranlement ou le son qui s'y propage a parcouru aller et retour celle des deux qui en a plus mince ou dans la section transversale a le moins de superficie ; et le plus généralement elles sont de matières différentes, lorsqu'il a ainsi parcouru celle des deux dont la masse ébranlée pendant chaque instant est la moindre eu égard aux vitesses de propagation généralement différentes dans les deux matières. Si cette barre est aussi celle des deux que l'ébranlement met le moins de temps à parcourir d'un bout à l'autre, les expressions des vitesses des centres de gravité après le choc sont celles que j'ai données en décembre et janvier, et que M. Rankine a confirmées par un raisonnement élémentaire ; et elles sont assez simples.

Mais si le contraire a lieu, par exemple si, lorsque elles sont de même matière, la plus mince des deux est aussi la plus longue, comme le son, à l'instant de la séparation, a parcouru en deux sens un certain nombre de fois la plus courte en se réfléchissant à son extrémité libre et en se réfractant en quelque sorte pour passer chaque fois dans la plus longue, l'état de compression et de mouvement des diverses parties des deux barres est alors bien plus compliqué. Leurs vitesses de translation après le choc, c'est à dire les vitesses de leurs centres de gravité, peuvent néanmoins être données alors sous une forme générale qui n'a encore rien de

très compliqué, et qui permet de calculer la force vive perdue pour leur translation ultérieure. Je me suis assuré par une discussion délicate que l'état vibratoire des barres ne produisait pas de contrecoup ou de rencontre nouvelle entre les extrémités qui se sont quittées ; en sorte que les formules données pour les deux cas (Compte rendu 28 mai 1867 en mettant $-2\frac{M_2}{M_1}$ au lieu de $-2\frac{M_1}{M_2}$ dans l'avant-dernière) représentent bien les vitesses définitives de translation après le choc longitudinal de deux barres parfaitement élastiques.

25 mai 1867

de St Venant

40 Avenue de Wagram

L'Institut

DS.

DE S A I N T - V E N A N T, Adhemar Jean Claude Barré de - French
Mathematician and Physicist

B. August 23, 1797. Fortoiseau
D. January 6, 1886. Villeporcher nr. St. Quen

Developed new formulae for the friction and the conveyance of water in channels, for the outflow of air through orifices, conceived a new theory on the homogenity and resistance of solid bodies, on soil pressure against walls and the propagation of light-waves. In the theory of elasticity he found the integration of a differential equation, which is named for him. He succeeded the famous PONCELET in the french Academy.

A.L.S. ¾ p. fol., March 25, 1867. Scientific communication to the "SOCIETE PHILOMATIQUE" of Paris, submitted in the meetings of May 11 and 25th 1867 dealing with the problem of the longitudinal shock of two elastic bars and the proportion of energy lost for the subsequent translation.

WEINER